

$$K = \mathbb{R}$$

$$K' = \mathbb{C}$$

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathcal{E}_{G_n}(\mathbb{R}) \subseteq A_{G_n}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$n=2: X=0$$

$$U_0 := \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \hat{\pi} := \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}.$$

punto reale $\rightarrow$ punto che assume la
di $A_{G_n}(\mathbb{C})$ = punti a coord. reali. coord. reali.

nelto reale $\rightarrow$ nelto che assume la
di $A_{G_n}(\mathbb{C})$ = equazioni reali. eq. reali.

Def: Un cune di $AG_n(\mathbb{C})$ o $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è detto reale

$\Leftrightarrow$ esso coincide con il suo coniugato rispetto al coniugio di $\mathbb{C}$.

$$\text{ovv } X \subseteq AG_n(\mathbb{C}) \quad \tilde{X} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$\bar{X} := \{ \bar{x} \in AG_n(\mathbb{C}) : x \in X \} \quad \tilde{X} = \{ [\bar{x}] : [x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \}$$

Oss: Un punto di $AG_n(\mathbb{C})$ è reale $\Leftrightarrow$ am ha coord. in $\mathbb{R}^n$
 Un punto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è reale $\Leftrightarrow$ esso ammette coord. in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

$$1) \overline{(x_2 \dots x_n)} = (x_2 \dots x_n) \Leftrightarrow \forall i : x_i = \bar{x}_i \Leftrightarrow \forall i : x_i \in \mathbb{R}.$$

$$2) \overline{[(x_2 \dots x_n)]} = [(x_2 \dots x_n)] \Leftrightarrow \overline{(x_2 \dots x_{n+1})} \in [(x_2 \dots x_n)] \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} : \overline{(x_2 \dots x_n)} = \lambda (x_2 \dots x_n)$$

→ SOTTOCASI:

i) $\alpha = -1 \Rightarrow$

$$\frac{(x_1 \dots x_n)}{(x_1 \dots x_n)} = -(x_1 \dots x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall j \quad \bar{x}_j = -x_j \Leftrightarrow x_j = i \lambda_j \text{ con } \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

per n allora $[i(\lambda_1 \dots \lambda_n)] = [x_1 \dots x_n]$

$$\Rightarrow [(\lambda_1 \dots \lambda_n)] = [x_1 \dots x_n] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ il punto $[(\lambda_1 \dots \lambda_n)]$ giace su

l'ipr. reale $[(\lambda_1 \dots \lambda_n)]$.

Valenza se $P = [(\lambda_1 \dots \lambda_n)]$ è tale che

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{P} = [\overline{(\lambda_1 \dots \lambda_n)}] = P$$

$\Rightarrow P$ reale.

$$(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

ii) $\alpha \neq -1 \Rightarrow (x_1 \dots x_n), \alpha(x_1 \dots x_n) \in$

$$\mathcal{L}[(x_1 \dots x_n)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha+1)(x_1 \dots x_n) \in \mathcal{L}[(x_1 \dots x_n)] \text{ e per } \alpha$$

$$(\alpha+2)(x_1 \dots x_n) = (x_1 \dots x_n) + (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) =$$

$$= (x_1 + \bar{x}_1 \dots x_{n+1} + \bar{x}_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

inoltre $(x_2 + \bar{x}_1 \dots x_{n+1} + \bar{x}_{n+1}) \neq 0$ perché $(d+1) \neq 0$

$$\Rightarrow P = [(x_2 + \bar{x}_2 \dots x_{n+1} + \bar{x}_{n+1})] \text{ perché}$$

$$0 \neq (x_1 + \bar{x}_1 \dots x_{n+1} + \bar{x}_{n+1}) \text{ quindi } L((x_2 \dots x_{n+1})).$$

□

con le equazioni si ragiona al medesimo modo.

$$\tilde{V}(F) = \overline{\tilde{V}(F)} \quad \text{ma} \quad \overline{\tilde{V}(F)} = \tilde{V}(\bar{F}).$$

$$\tilde{V}(F) = \tilde{V}(\bar{F}) \Leftrightarrow \tilde{V}(F) \text{ reale.}$$

$$\bar{F} \neq F \Rightarrow \tilde{V}(F) = \tilde{V}(F + \bar{F})$$

↪ equazione reale.

$$\bar{F} = -F \Rightarrow F = \text{di } G \text{ con } G \text{ polinomio reale} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{V}(F) = \tilde{V}(G) \quad \text{OK.}$$

per far vedere che $\overline{\tilde{V}(F)} = \tilde{V}(\overline{F})$ non si può in
quale problema
ma bisogna stare attenti a far vedere che $\overline{F}$
è naturalmente l'unico polinomio che "ci serve".

Ad esempio in $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ non vale.

$$V(x^2 + y^2 + 1) = \emptyset$$

$$\emptyset = V(x^4 + x^2 + y^2 + 3).$$

$$\overline{V(x^2 + y^2 + 1)} = \emptyset$$

Ma in $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ che un insieme di punti X

coincide con $\overline{X}$ non implica che l'eq. di $\overline{X}$

sia la coniugata dell'eq. di X .

Invece se l'eq. di $\overline{Y}$ è la coniugata dell'eq. di $X \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y = \overline{X}.$$

In $\mathbb{P}^n$ invece la cosa è vera "sostanzialmente".

$$\text{Se } X = \tilde{V}(F) \quad Y = \tilde{V}(G) \quad \text{e} \quad X = Y$$

$$\Rightarrow \exists \text{ un polinomio } H \text{ tale che } F = H^{\ell}, \quad G = H^k \\ \text{con } \ell, k > 0 \Rightarrow X = \tilde{V}(H) = Y.$$

$$\Rightarrow \text{Se } Y = \bar{X} \Rightarrow Y = \tilde{V}(G) \quad X = \tilde{V}(F) \text{ ma}$$

possiamo scrivere $Y = \tilde{V}(\bar{H})$ ed $X = \tilde{V}(H)$
con H di grado minimo che definisce $\bar{H}$ insieme.

$$X = \bar{X} = Y \Rightarrow X = \tilde{V}(H) = \bar{X} = \tilde{V}(\bar{H})$$

$$\Rightarrow \text{se } H \neq \bar{H} \Rightarrow X = \tilde{V}(H + \bar{H})$$

$$\text{ne } H = -\bar{H} \Rightarrow X = \tilde{V}(iH).$$

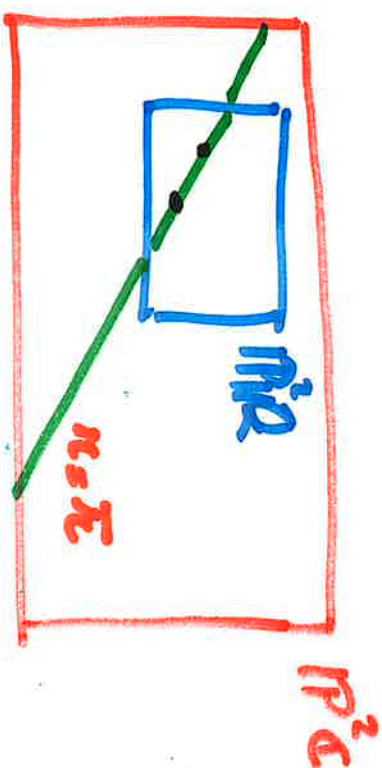
In $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ e $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

retta reale in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: retta che annulla una eq. a coeff. reali
= retta che coincide con la coniugata.

$$\Re(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0 \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$
$$\Re \in \mathbb{C} ; \Re \neq 0$$

→ in generale una retta reale contiene ∞^2 punti reali.

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$



Per 2 punti: reali
passa una ed una
sola retta (reale).

$$n = \bar{n} \Rightarrow P \in n \Rightarrow \bar{P} \in \bar{n} = n.$$

→ per ogni punto immaginario di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$
(non reale)

esiste una ed una sola retta reale.

P immaginario $\Leftrightarrow P \neq \bar{P}$

ma allora $\exists!$ retta per P e $\bar{P} : r_P$

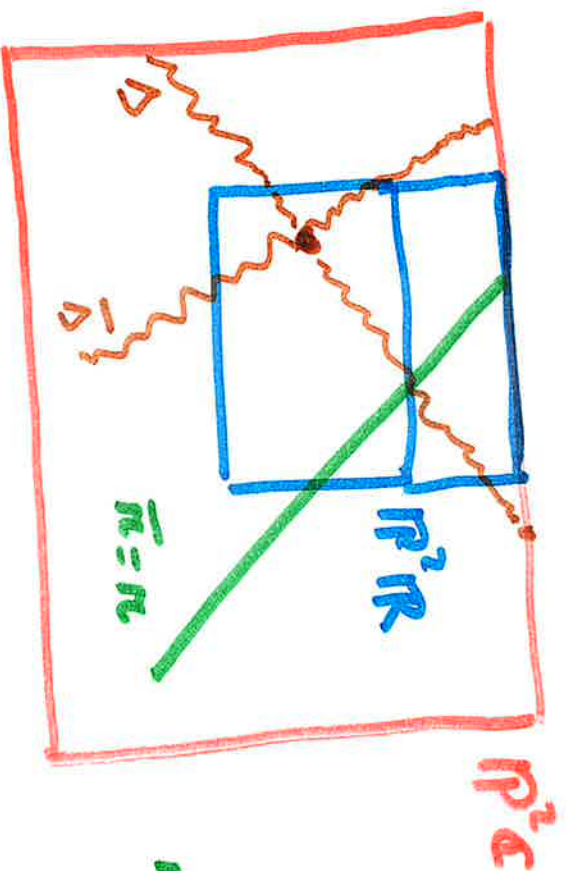
$r_P = P\bar{P} = \bar{P}P = \overline{P\bar{P}} = \bar{r}_P \Rightarrow$ la retta per P e $\bar{P}$ è reale.
Viceversa se $r_P \ni P$ ed r_P reale $\Rightarrow \bar{P} \in r_P \Rightarrow r_P = P\bar{P}$ o

cosa si può dire delle rette immaginarie in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$?

→ ogni retta immaginaria di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ha esattamente un
punto reale.

Dim: r_P immaginaria $\Rightarrow r_P \neq \bar{r}_P \Rightarrow r_P \cap \bar{r}_P = \{P\} \Rightarrow P = r_P \cap \bar{r}_P = \bar{P}$
 $= \bar{r}_P \cap r_P = \bar{P}$

$\Rightarrow P$ reale.



$n = \text{reale}$.

In P^3_C : la situazione dei piani (=iperpiani) è analoga a quella delle rette in P^2_C (ma quella delle rette no).

- 1 $\rightarrow$ Ogni piano di P^3_C contiene almeno una retta reale.
- 2 $\rightarrow$ Se un piano contiene 2 rette reali $\Rightarrow$ esso è reale
ipotizzato
- 3 $\rightarrow$ per ogni retta immaginaria ci possono essere 0 oppure 1 piani reali.
- 4 $\rightarrow$ per ogni retta reale ci sono ∞ piani reali.

1) Sia $\pi \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ un piano $\Rightarrow \pi \cap \bar{\pi}$ è una retta.
immaginario

$$\Rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \overline{\pi \cap \bar{\pi}} = \bar{\pi} \cap \pi \text{ è reale.}$$

Se $\pi \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ è reale $\Rightarrow$ esso contiene ∞^2 rette reali
intersecate con un altro piano reale $\sigma \neq \pi$ è
una retta reale).

N.B.: Non tutte le rette di un piano reale sono reali!!

$\pi: \begin{cases} x=0 \\ y=i \end{cases}$ non è una retta reale!
 $(0, i, 0) \in \pi$ ma $(0, -i, 0) \notin \pi$

2) Se π contiene 2 rette reali e distinte $\Rightarrow \pi$ contiene almeno
3 punti reali e altri non altrimenti



π è il piano per P, Q, R ed ammette eq. reale. $\pi = \bar{\pi}$

3) Sia π una retta immaginaria $\Rightarrow$

i) π ed $\bar{\pi}$ sono complanari $\Rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \{P\}$ reale
 e l'unico piano che contiene π ed $\bar{\pi}$ è reale.



$Q \in \pi \Rightarrow \bar{Q} \in \bar{\pi}$

$Q \neq P$

e considerare il piano
 π per $P, Q, \bar{Q}$.

$$\pi \subseteq \pi; \bar{\pi} \subseteq \pi \quad \text{e} \quad \bar{\pi} = \overline{\langle P, Q, \bar{Q} \rangle} = \overline{\langle \bar{P}, \bar{Q}, Q \rangle} = \\ = \langle P, \bar{Q}, Q \rangle = \pi.$$

In questo caso si dice che π è immaginaria di I specie.

ii) $\neg \exists \pi$ sono sembrano $\Rightarrow$ non $\exists$ un piano che
le conferenzi entrambe (ed in particolare non
 $\exists$ un piano reale che conferenzi tutti di esse)
 $\Rightarrow$ In questo caso si dice che π è immaginaria
di II specie.

Esercizi

A) Riconoscere se una retta è un. di I specie,
di II specie o
reale.

B) data una retta un. di I specie trovare il
piano reale che la contiene.

A) Supponiamo di avere la matrice data da

$$\pi: \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d'x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$$

Studiare $\pi \cap \bar{\pi}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{bmatrix}.$$

$$\text{rk}(A) = 2 \Rightarrow \pi = \bar{\pi} \Rightarrow \pi \text{ è reale.}$$

$$\text{rk}(A) = 4 \Rightarrow \pi \text{ ed } \bar{\pi} \text{ sono sghembi} \Rightarrow \pi \text{ interseca } \Pi \text{ s.p.}$$

$$\text{rk}(A) = 3 \Rightarrow \pi \cap \bar{\pi} = \{P\} \Rightarrow \pi \text{ ed } \bar{\pi} \text{ sono in di I s.p.}$$

B) Trovare i piani reali o le eq. reali.

Trovare il pn. reale che contiene la retta

$$r: \underline{x+2y+5z-7=0} = 3x+2iy-5i+11$$

$\downarrow$
 π è già reale.

Trovare il pn. reale che contiene

$$r: x+2iy-z=0 = x-2iy$$

$$x+2iy-z+x-2iy=2x-z$$

$2x-z=0$ piano del
fascio per r
reale.

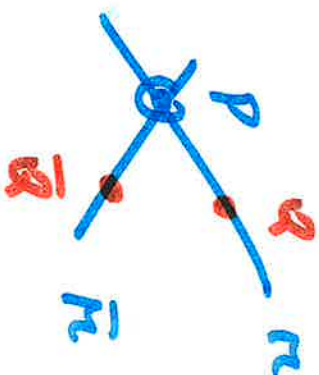
Piano per u ed $\bar{u}$

$$\alpha(x+2iy-z) + \beta(x-2iy) = 0$$

volgiamo che $(\alpha+\beta)x + (2i\alpha-2i\beta)y - \alpha z = 0$

abbia coeff. in $\mathbb{R}$.

$$\text{ric} \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2i(\alpha+\beta) & -\alpha \\ \bar{\alpha}+\bar{\beta} & -2i(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) & -\bar{\alpha} \end{pmatrix} = 1$$



$$\begin{cases} x+2iy-z=0 \\ x-2iy-z=0 \\ x+2iy=0 \end{cases} \rightarrow \text{rank} = 2$$

$$x=1, y=1, z=4i$$

$$\bar{\alpha} = (-2i, 1, -4i).$$

$$\alpha = a+ib$$

$$\beta = a'+ib'$$

$\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{C}$ Curva algebrica

f non costante.

$AG_2(\mathbb{K})$

$V(f) := \{ (x, y) \in AG_2(\mathbb{K}) : f(x, y) = 0 \}$

$\mathbb{P}^2/\mathbb{K}$

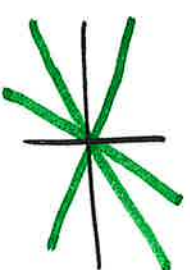
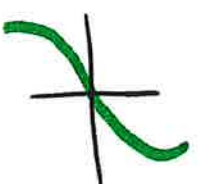
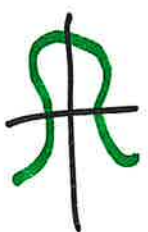
$\tilde{V}(F) = \{ [(x_1, x_2, x_3)] : F(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

$f \in \mathbb{K}[x, y]$

$\deg f$

- $\deg f = 1 \Rightarrow$ rette
- $\deg f = 2 \Rightarrow$ coniche
- $\deg f = 3 \Rightarrow$ cubiche



Teorema: Sia $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polinomio non costante ed $\pi: y = ax + b$ l'eq. di una retta non parallela all'asse delle x .
 $\Rightarrow |V(f) \cap V(\pi)| \leq \deg f$, oppure $V(\pi) \subseteq V(f)$

Dim: $P \in V(f) \cap V(\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_P, y_P) = 0 \\ y_P = ax_P + b \end{cases} \Leftrightarrow$

$$f(x_P, ax_P + b) = 0$$

posto $g(x) = f(x, ax + b)$ abbiamo

$$0 \quad 1) \quad g(x) \equiv 0 \quad \forall x \Rightarrow V(\pi) \subseteq V(f)$$

$$2) \quad \deg g(x) \leq \deg f(x,y) \Rightarrow g(x) = 0 \quad \text{ha al$$

Più $\deg f$ soluzioni.

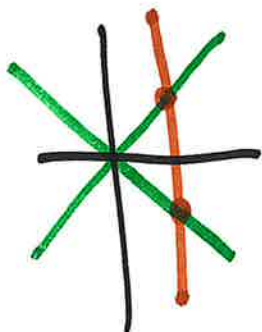
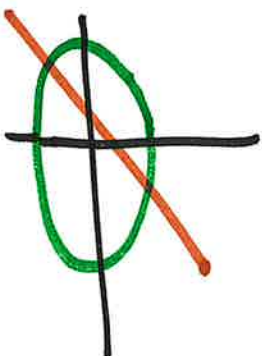
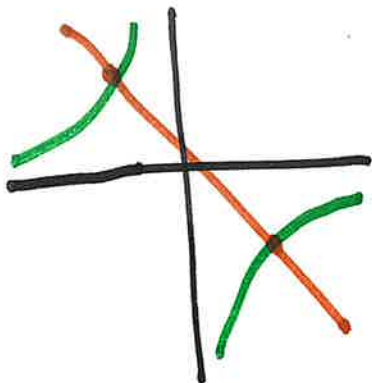
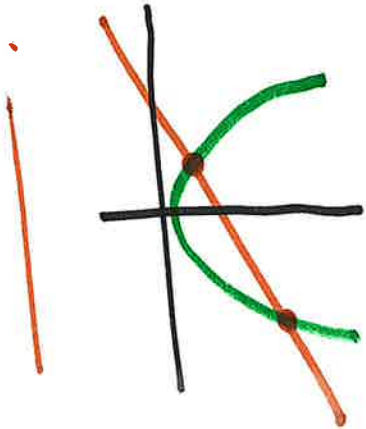
□

$$\max_n |V(f)_{n \times n}| = \deg f$$

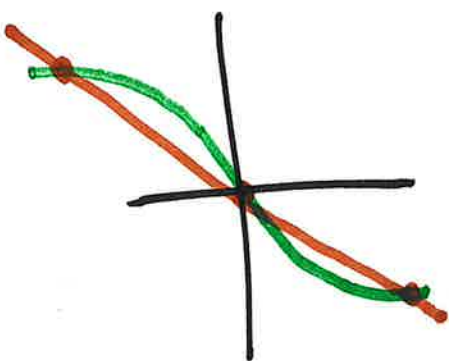
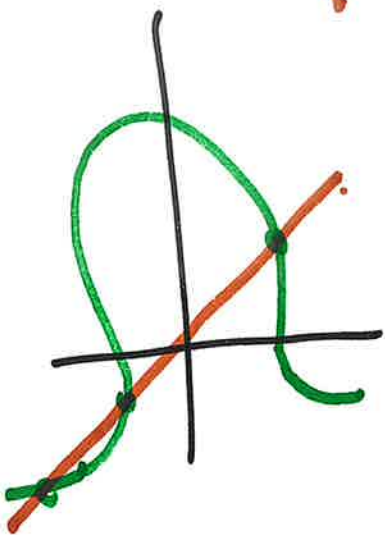
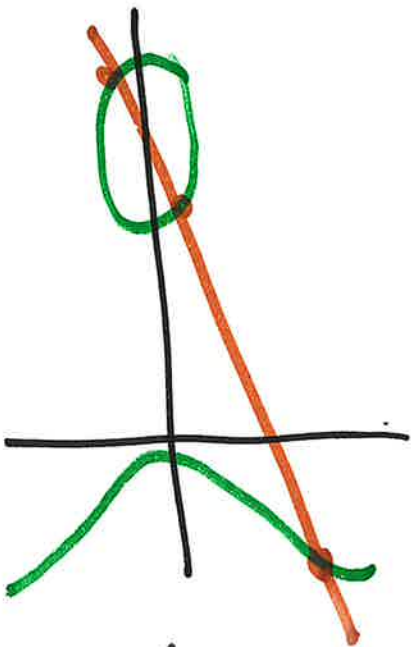
1



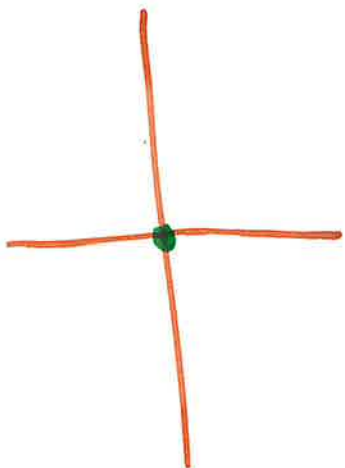
2



3



$$x^2 + y^2 = 0$$



$$x^2 + y^2 = -1$$

Lavoriamo in $\mathbb{C} \rightarrow$ In $\mathbb{C}$ un polinomio $g(x)$ di grado n ha sempre n radici.

$$AG_2(\mathbb{C}) : \quad |V(f) \cap V(\pi)| = V(\pi)$$

oppure

$$|V(f) \cap V(\pi)| \leq \deg f.$$

"
deg 8.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = k \end{cases}$$

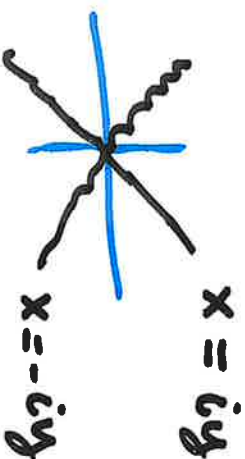
$$\rightarrow P = (k, k^2)$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = (\pm\sqrt{k}, k)$$

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + iy)(x - iy) = 0$$

$$\Rightarrow V_G(x^2 + y^2) = V(x + iy) \cup V(x - iy)$$



Teorema dell'ordine: In $\mathbb{P}^2$ sia $F(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado d .

Allora ogni retta di $\mathbb{P}^2$ non contenuta in $V_G(F)$ interseca $\tilde{V}_G(F)$ in esattamente d punti contati con le debite molteplicità.

oss: Se $|K_0 \tilde{V}(F)| > d \Rightarrow K_0 \subseteq \tilde{V}(F)$.